3. 4 Método de Gauss-Jordan

El método de Gauss-Jordan utiliza operaciones con matrices para resolver sistemas de ecuaciones de n numero de variables.

Para aplicar este método solo hay que recordar que cada operación que se realice se aplicara a toda la fila o a toda la columna en su caso.

El objetivo de este método es tratar de convertir la parte de la matriz donde están los coeficientes de las variables en una matriz identidad. Esto se logra mediante simples operaciones de suma, resta y multiplicación.

El procedimiento es el siguiente:

Primero se debe tener ya el sistema de ecuaciones que se quiere resolver y que puede ser de n numero de variables por ejemplo:

$-3x+3y+2z=1$

$4x+y-z=2$

$x-2y+z=3$

Se acomodan los coeficientes y los resultados en una matriz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

En el ejemplo, el -3 de la primera matriz se tiene que convertir en un 1, según la matriz identidad, así que hay que dividir entre -3, pero como una operación se aplica a toda la fila, entonces toda la primera fila se tiene que dividir entre –3:

$$-\tfrac{1}{3}\cdot \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -\tfrac{2}{3} & -\tfrac{1}{3} \\ 4 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Después, como se ve en la matriz identidad, hay que hacer 0 toda la columna debajo del 1, y se hace multiplicando por algo la fila de arriba y sumándola a la fila de abajo.

En este caso, se multiplica por -4 la fila de arriba y se suma con la correspondiente posición de la fila de abajo:

$$-4R1+R2 \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -\tfrac{2}{3} & -\tfrac{1}{3} \\ 4 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -\tfrac{2}{3} & -\tfrac{1}{3} \\ 0 & 5 & {}^{5}/_{3} & {}^{10}/_{3} \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Para hacer cero el siguiente renglón simplemente hay que multiplicar por –1 al primer renglón sumarlo al tercero:

$$\begin{array}{r} \\ \\ -R1+R3 \longrightarrow \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 5 & \frac{5}{3} & \frac{10}{3} \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 5 & \frac{5}{3} & \frac{10}{3} \\ 0 & -1 & \frac{5}{3} & \frac{10}{3} \end{array}\right)$$

El siguiente paso para lograr una matriz identidad es obtener el siguiente 1, que en este caso iría en donde esta el 5 en la segunda fila.
Para lograrlo hay que dividir toda la segunda fila entre 5:

$$\begin{array}{r} \\ \frac{1}{5} \longrightarrow \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 5 & \frac{5}{3} & \frac{10}{3} \\ 0 & -1 & \frac{5}{3} & \frac{10}{3} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -1 & \frac{5}{3} & \frac{10}{3} \end{array}\right)$$

Después se tienen que hacer 0 los que están arriba y abajo del 1, que en este caso sería, para el que esta arriba R2+R1:

$$\begin{array}{r} \\ R2+R3 \longrightarrow \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -1 & \frac{5}{3} & \frac{10}{3} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{6}{3} & \frac{12}{3} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

Ahora hay que hacer cero la posición a_{12}. En este caso con hacer R2+R1 es suficiente:

$$\begin{array}{r} R2+R1 \longrightarrow \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

Dividir entre 2 R3 nos permite encontrar el otro 1, el de la posición a_{33}:

$$\begin{array}{r} \\ \\ 1/2 \longrightarrow \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Ahora necesitamos ceros en las posiciones a_{13} y a_{23}. Dividir entre ⅓ R3 y sumarlo a R1 nos permitirá encontrar uno de ellos:

$$R3+R1 \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

El último cero lo logramos multiplicando por $-\frac{1}{3}R3$ y sumándolo a R2:

$$-\frac{1}{3}R3+R2 \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \end{array}\right)$$

Al encontrar la matriz identidad se encuentra la solución del sistema de ecuaciones, pues esto se traduce a:

$x = 1$

$y = 0$

$z = 2$

las cuales resuelven el sistema de ecuaciones de forma simultánea. La comprobación es la siguiente:

$-3(1)+3(0)+2(2)= -3+4 =1$

$4(1)+(0)-(2)=4-2 =2$

$(1)-2(0)+(2)= 1+2 =3$

Como puede verse el método Gauss-Jordan es una herramienta útil en la resolución de este tipo de problemas y actualmente existen programas matemáticos que lo utilizan para una gran variedad de cálculos en una gran variedad de áreas, tanto científicas como socioeconómicas.